

# Угол между векторами



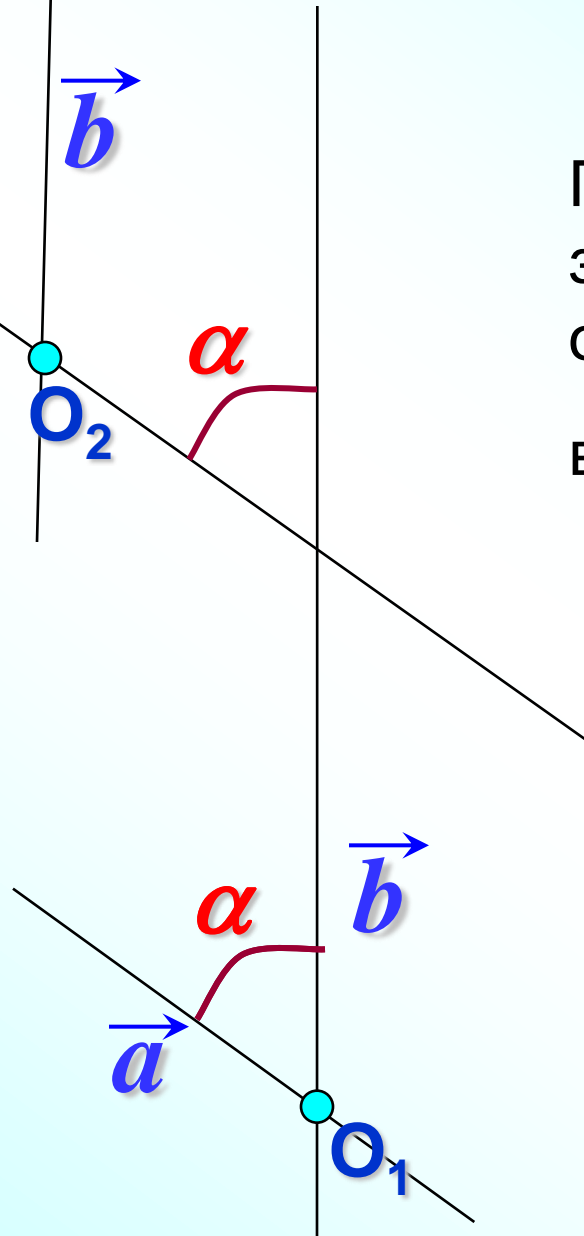
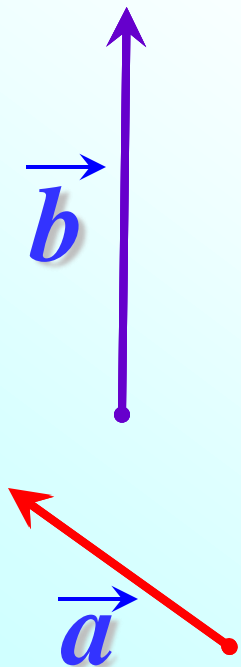
Лучи OA и OB образуют угол AOB.

Градусную меру этого угла обозначим буквой  $\alpha$

Угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $\alpha$

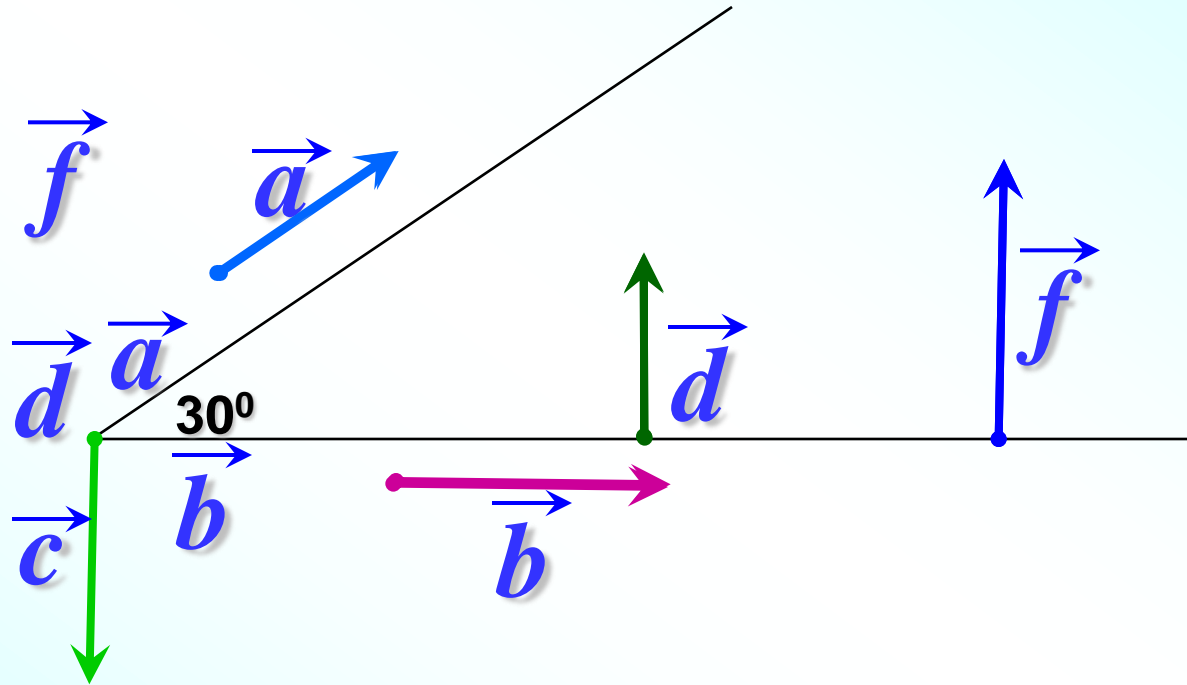
## Угол между векторами

Градусная мера угла  $\alpha$  не зависит от выбора точки  $O$ , от которой откладывают векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$



Обоснуем это с помощью рисунка.

Найти углы между векторами.



$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 30^\circ$$

$$\widehat{\vec{a} \vec{c}} = 120^\circ$$

$$\widehat{\vec{b} \vec{c}} = 90^\circ$$

$$\widehat{\vec{d} \vec{c}} = 180^\circ$$

$$\widehat{\vec{d} \vec{f}} = 0^\circ$$

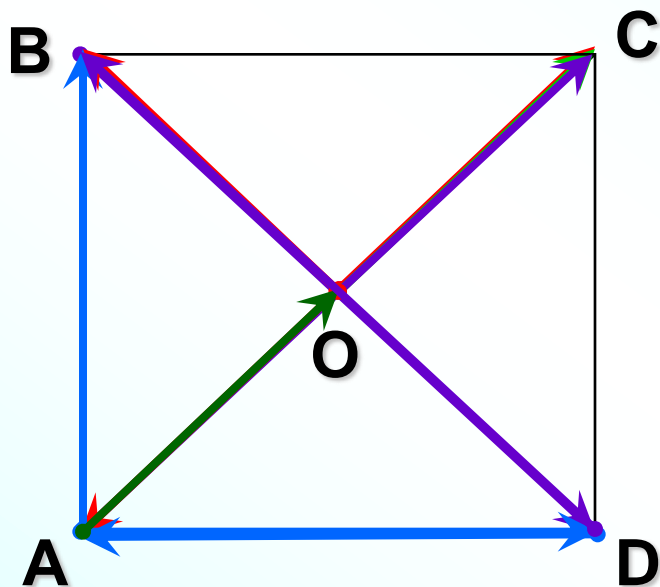
Два вектора называются  
**перпендикулярными**,  
если угол между ними равен  $90^\circ$ .

$$\vec{b} \perp \vec{c}$$

$$\vec{b} \perp \vec{d}$$

$$\vec{b} \perp \vec{f}$$

**№ 1039** Диагонали квадрата пересекаются в точке  $O$ .  
Найдите углы между векторами.



$$\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}} = 45^\circ$$

$$\widehat{\vec{AB}, \vec{DA}} = 90^\circ$$

$$\widehat{\vec{OA}, \vec{OB}} = 90^\circ$$

$$\widehat{\vec{OA}, \vec{OC}} = 180^\circ$$

$$\widehat{\vec{AC}, \vec{BD}} = 90^\circ$$

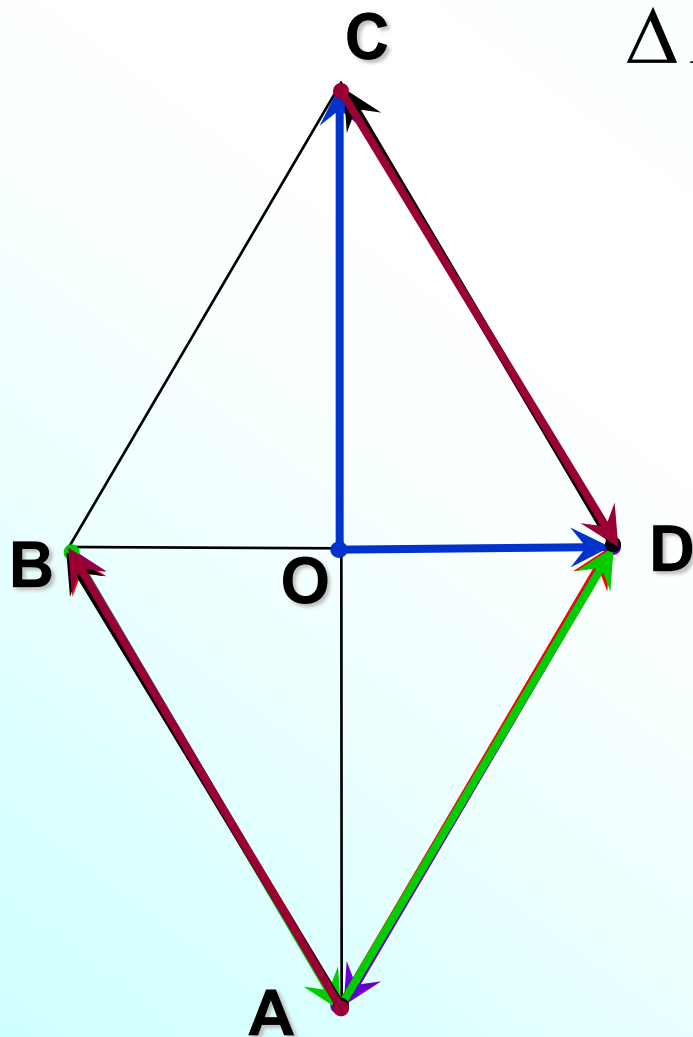
$$\widehat{\vec{AD}, \vec{DB}} = 135^\circ$$

$$\widehat{\vec{AO}, \vec{OC}} = 0^\circ$$

**№ 1040** Диагонали ромба пересекаются в точке  $O$ ,  
диагональ  $BD$  равна стороне ромба.

Найдите углы между векторами.

$\triangle BDC - p / cm$



$$\widehat{\vec{AB}, \vec{AD}} = 60^\circ$$

$$\widehat{\vec{AB}, \vec{DA}} = 120^\circ$$

$$\widehat{\vec{BA}, \vec{AD}} = 120^\circ$$

$$\widehat{\vec{OC}, \vec{OD}} = 90^\circ$$

$$\widehat{\vec{AB}, \vec{DC}} = 0^\circ$$

$$\widehat{\vec{AB}, \vec{CD}} = 180^\circ$$

**Сумма векторов – вектор.**

**Разность векторов – вектор.**

**Произведение вектора на число – вектор.**

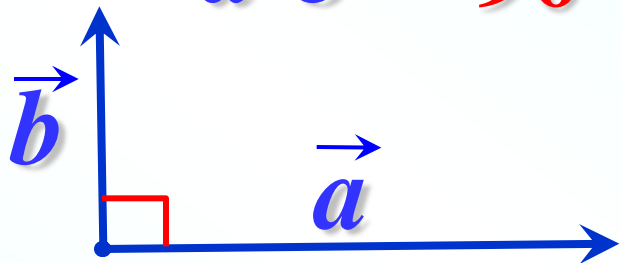
**Скалярное произведение векторов – число.**

**Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a} \vec{b}})$$

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 90^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$



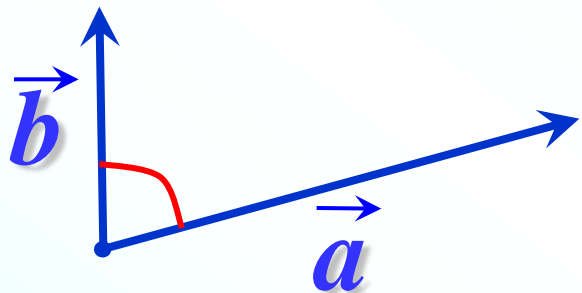
Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  перпендикулярны, то скалярное произведение векторов равно нулю.

Обратно: если  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , то векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  перпендикулярны.

**Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 90^\circ$$



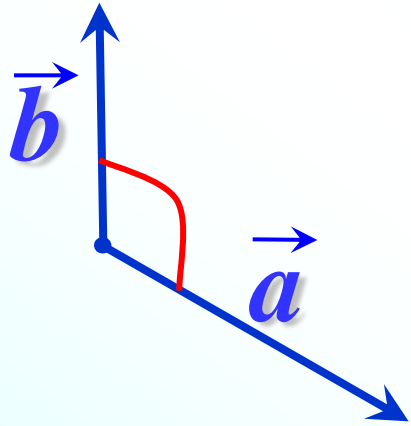
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha > 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда, когда угол между векторами **острый**.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \iff \vec{a} \cdot \vec{b} < 90^\circ$$



$$\vec{a} \vec{b} > 90^\circ$$



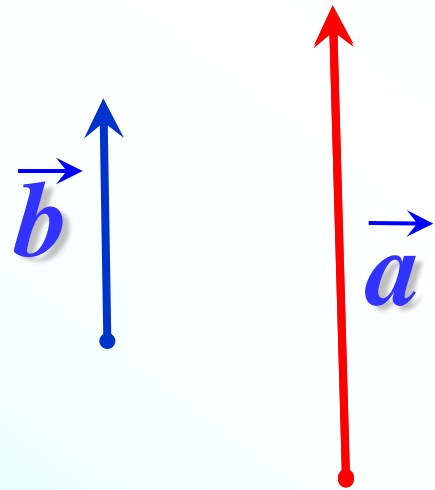
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha < 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой**.

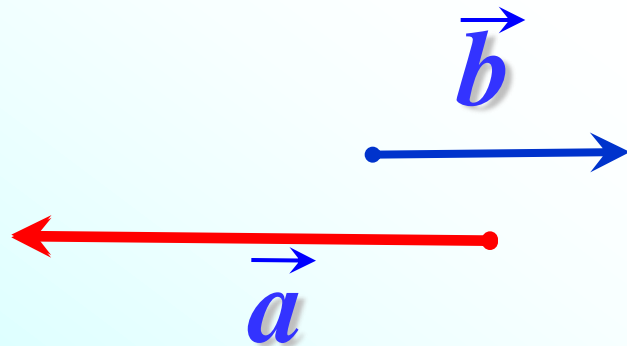
$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \iff \vec{a} \vec{b} > 90^\circ$$

Если  $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 0^\circ$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \overset{1}{\cos 0^\circ} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

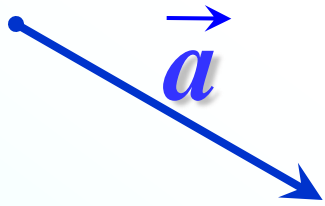


Если  $\vec{a} \downarrow\downarrow \vec{b}$

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 180^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \overset{-1}{\cos 180^\circ} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

$$\widehat{\vec{a} \vec{a}} = 0^\circ$$



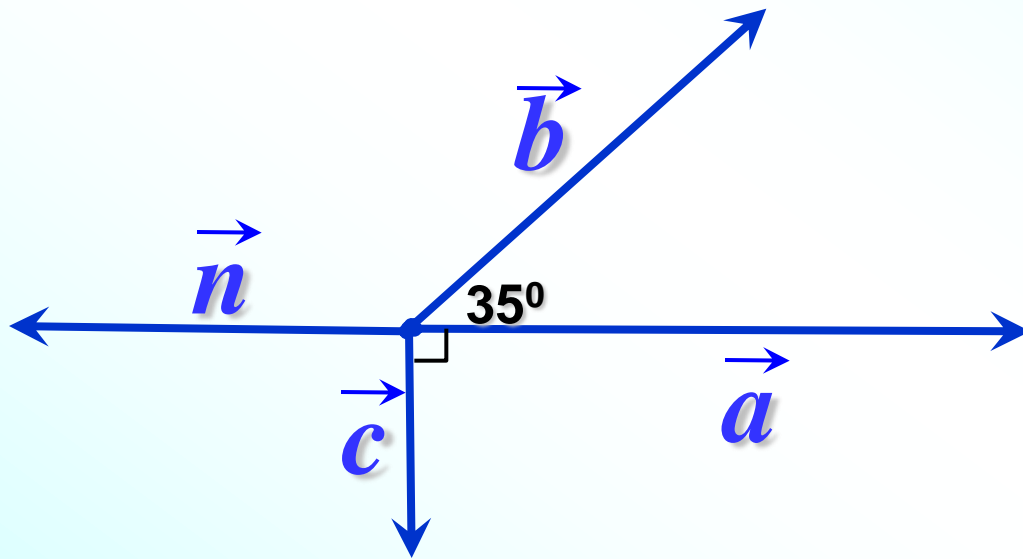
$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos \overset{\textcircled{1}}{0^\circ} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

Скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{a}$  называется  
**скалярным квадратом** вектора  $\vec{a}$  и обозначается  $\vec{a}^2$

Таким образом,  
**скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.**

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

Определите знак  
скалярного произведения.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\vec{c} \cdot \vec{b} < 0$$

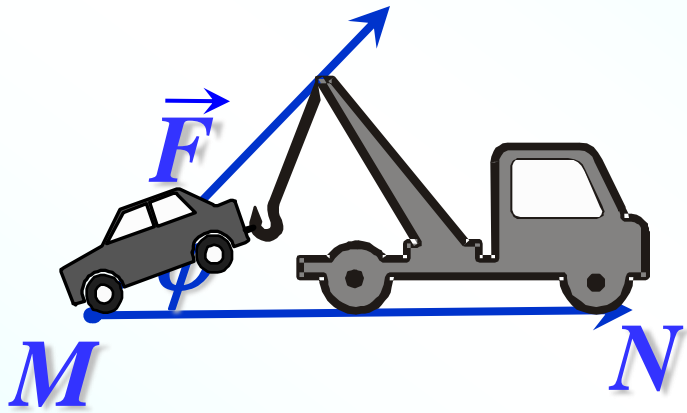
$$\vec{a} \cdot \vec{a} > 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{n} < 0$$

$$\vec{c} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{n} < 0$$

## Скалярное произведение в физике



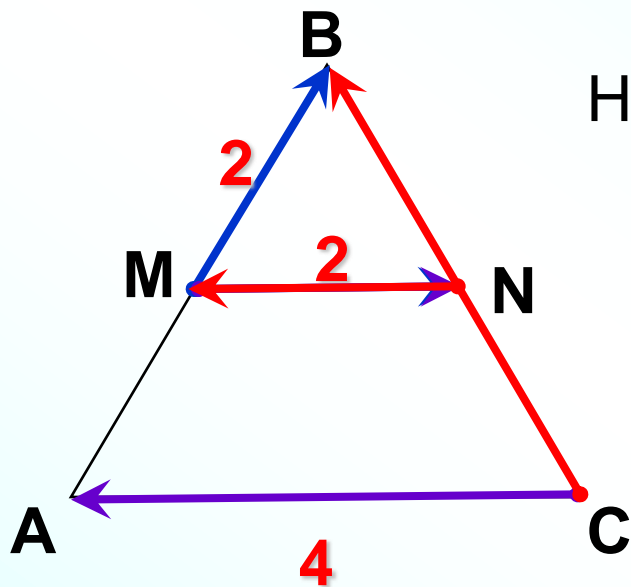
Скалярное произведение векторов встречается в физике. Например, из курса механики известно, что работа  $A$  постоянной силы  $\vec{F}$  при перемещении тела из точки  $M$  в точку  $N$  равна произведению силы  $\vec{F}$  и перемещения  $\vec{MN}$  на косинус угла между ними.

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{MN}| \cos \varphi$$

$$A = \vec{F} \cdot \vec{MN}$$

$\Delta ABC$  –  $p/c$ т.,  $MN$  – средняя линия

Найти скалярное произведение векторов



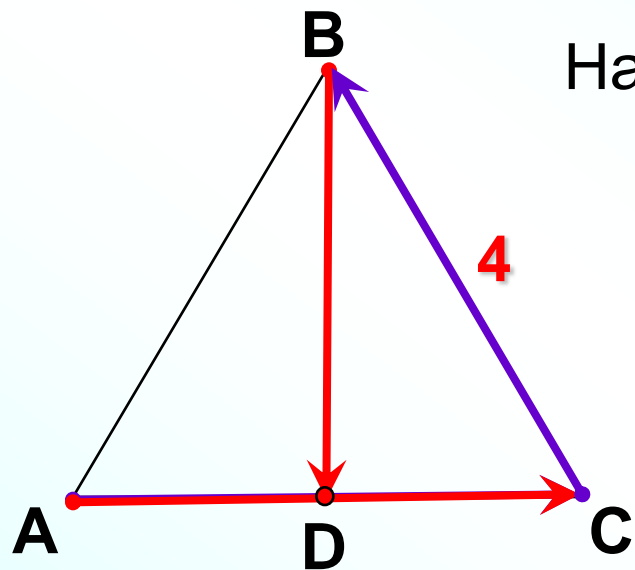
$$\begin{aligned}\vec{MN} \cdot \vec{MB} &= |\vec{MN}| \cdot |\vec{MB}| \cos \widehat{MN, MB} = \\ &= 2 \cdot 2 \cos 60^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{MN} \cdot \vec{CA} &= |\vec{MN}| \cdot |\vec{CA}| \cos \widehat{MN, CA} = \\ &= 2 \cdot 4 \cos 180^\circ = 8 \cdot (-1) = -8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{NM} \cdot \vec{CB} &= |\vec{NM}| \cdot |\vec{CB}| \cos \widehat{NM, CB} = \\ &= 2 \cdot 4 \cos 60^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4\end{aligned}$$

$\Delta ABC$  –  $p$  /  $cm.$ ,  $D$  – середина  $AC$

Найти скалярное произведение векторов



$$\vec{CB} \cdot \vec{CB} = \vec{CB}^2 = |\vec{CB}|^2 = 4^2 = 16$$

$$\vec{CB} \cdot \vec{BC} = -\vec{BC} \cdot \vec{BC} = -\vec{BC}^2 =$$

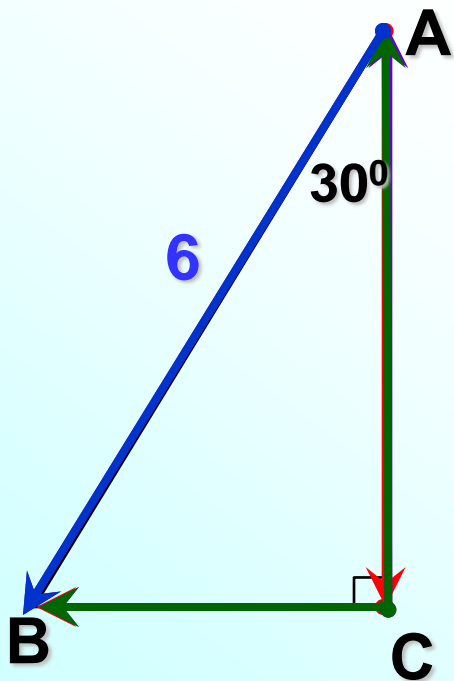
$$-|\vec{BC}|^2 = -4^2 = -16$$

$$\begin{aligned} \vec{AC} \cdot \vec{CB} &= |\vec{AC}| \cdot |\vec{CB}| \cos \widehat{AC, CB} = 4 \cdot 4 \cos 120^\circ = \\ &= 16 \cdot (-\cos 60^\circ) = 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -8 \end{aligned}$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$$

т.к.  $\vec{AC} \perp \vec{BD}$

Заполните пропуски, чтобы получилось верное высказывание



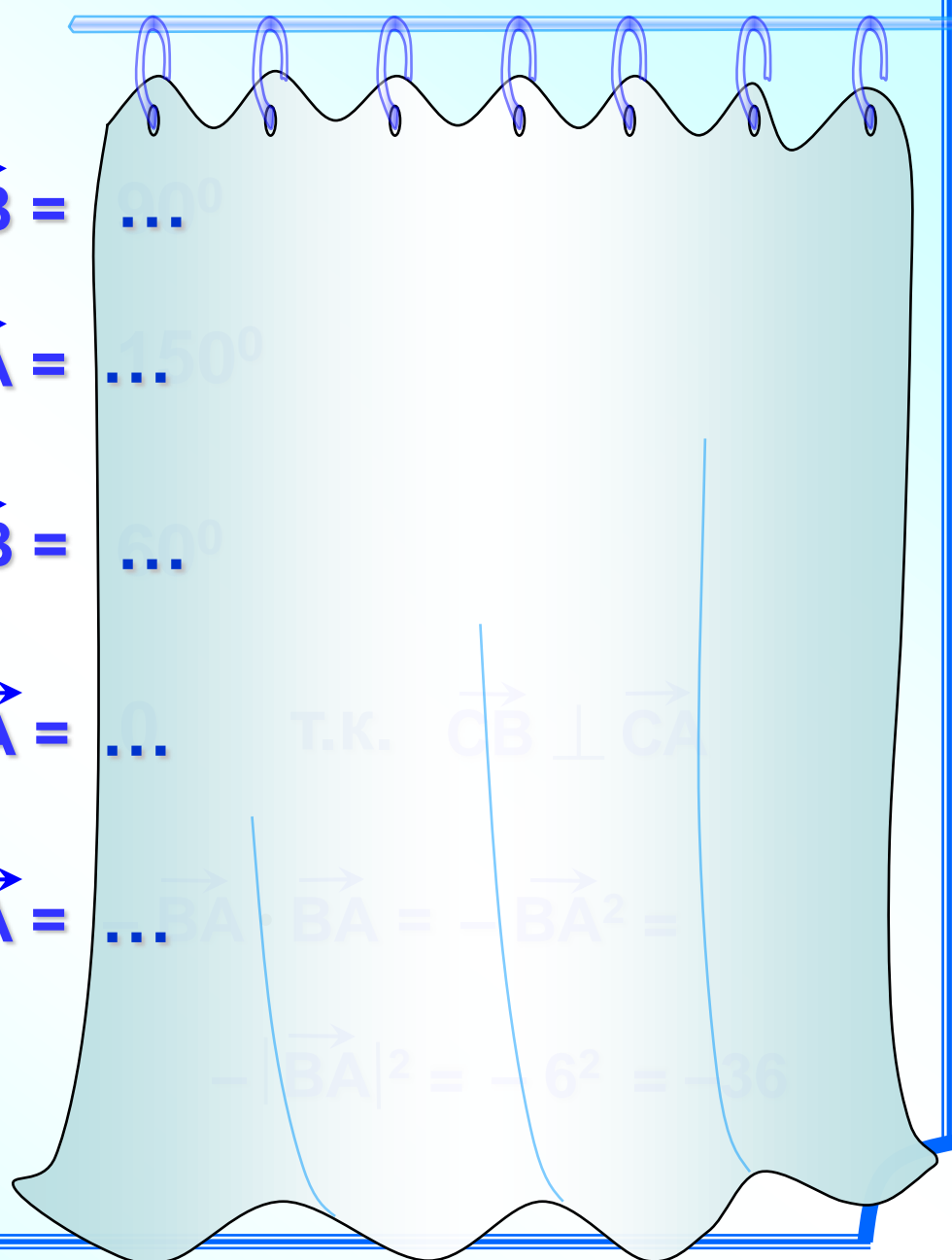
$$\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB} = \dots$$

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA} = \dots$$

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB} = \dots$$

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \dots$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = \dots$$





## Маленький тест

$$\vec{BC} \cdot \vec{BA} = |\vec{BC}| \cdot |\vec{BA}| \cos \widehat{BC, BA} = 6 \cdot 3 \cos 60^\circ = 18 \cdot \frac{1}{2}$$

1

$9\sqrt{3}$

ПОДУМАЙ

!

2

9

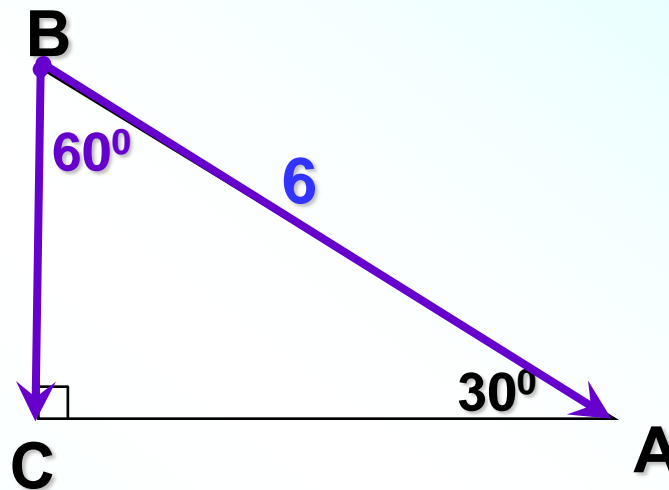
ВЕРНО!

3

18

ПОДУМАЙ

!



Проверка



# Скалярное произведение векторов

$\vec{AC}$  и  $\vec{BA}$  : отрицательно, т.к. угол между векторами тупой

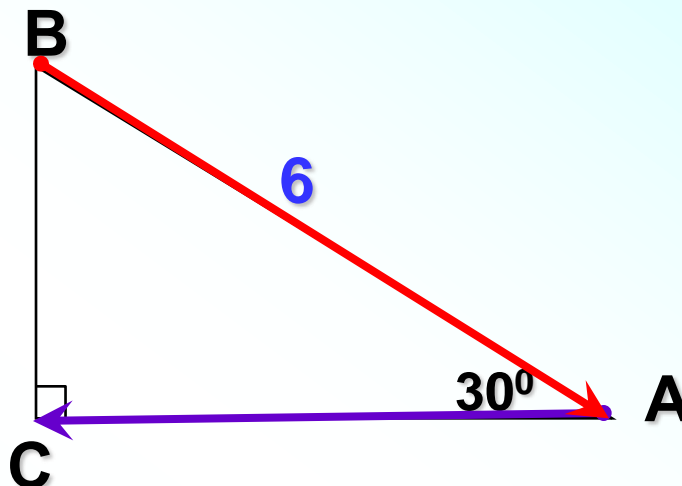
**ВЕРНО!**

1 отрицательно;

ПОДУМАЙ

2 !  
равно нулю;

3 положительно.



ПОДУМАЙ  
!

Проверка (2)



# Скалярное произведение координатных векторов

$\vec{i}$  и  $\vec{j}$  : равно нулю, т.к. угол между векторами прямой

1

1

ПОДУМАЙ !

2

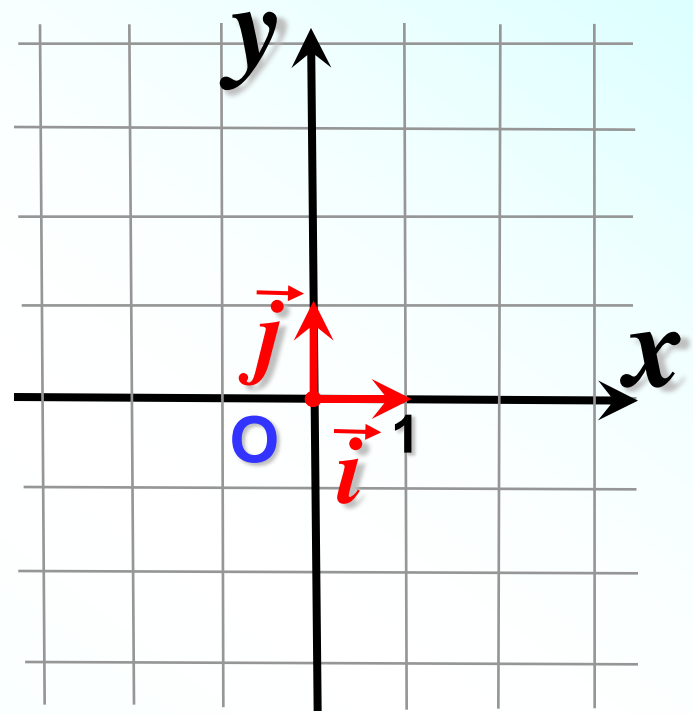
-1

ПОДУМАЙ !

3

0

ВЕРНО!



Проверка



Скалярный квадрат вектора  $\vec{i}$  равен:

**ВЕРНО!**

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

1

1

2

-1

ПОДУМАЙ

!

3

0

ПОДУМАЙ

!

$$\vec{i}^2 = |\vec{i}|^2 = 1^2 = 1$$

Проверка



Если  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$ ,  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 4$ ,  
то векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  :



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \widehat{\vec{a} \vec{b}}$$

$$12 = 3 \cdot 4 \cos \widehat{\vec{a} \vec{b}}$$

**1** сонаправлены;

**2** перпендикулярны;

**3** противоположно направлены.

ПОДУМАЙ  $\cos \widehat{\vec{a} \vec{b}} = 1$  !

ПОДУМАЙ

если  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$

Проверка (4)



Если  $\vec{x} \cdot \vec{y} = -20$ ,  $|\vec{x}| = 4$ ,  $|\vec{y}| = 5$ ,

то векторы  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  :

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cos \widehat{\vec{x} \vec{y}}$$

$$-20 = 4 \cdot 5 \cos \widehat{\vec{x} \vec{y}}$$

$$\cos \widehat{\vec{x} \vec{y}} = -1$$

$$\widehat{\vec{x} \vec{y}} = 180^\circ$$

ПОДУМАЙ

!

1

сонаправлены;

ПОДУМАЙ

!

2

перпендикулярны;

**ВЕРНО!**

3

противоположно направлены.

Проверка (4)

если  $\vec{x} \updownarrow \vec{y}$



Найдите угол между векторами  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$ , если

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = -15, \quad |\vec{m}| = 5, \quad |\vec{n}| = 6.$$

1

50°

ПОДУМАЙ

!

2

60°

ПОДУМАЙ

!

3

120°

**ВЕРНО!**

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой**

Проверка



Если  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$ ,  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 8$ ,

то угол между векторами

$\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \widehat{\vec{a} \vec{b}}$$

$$12 = 3 \cdot 8 \cos \widehat{\vec{a} \vec{b}}$$

1

30°

ПОДУМАЙ  
!

2

60°

ВЕРНО!

3

120°

ПОДУМАЙ  
!

$$\cos \widehat{\vec{a} \vec{b}} = \frac{1}{2}$$

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 60^\circ$$

Проверка (3)

